

Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

[Amr] : *Calcul différentiel*, Mohammed El Amrani

[Bar-Led] : *Probabilité*, Phillipe Barbe, Michel Ledoux

[Bec] : *Objectif agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis

[Bri-Pag] : *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès

[Cia] : *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*, Phillipe Ciarlet

[Gou-Wad] : *Équations différentielles : théorie, algorithmes et modèles*, Stéphane Gourmelen, Hicham Wadi

[Ram-Des-Odo] : *Topologie et élément d'analyse*, Edmond Ramis, Claude Deschamps, Jacques Odoux

[Rom] : *Analyse réelle*, Jean-Étienne Rombaldi

I Partie A - Quezaco ?

I.1 Que sont des fonctions monotones et convexes ? [Bec] [Rom] [Ram-Des-Odo] [Bar-Led]

| **Déf 1 (Fonction croissante, décroissante) :**

| **Ex 2 (Fonction de répartition) :**

| **Prop 3 (Stabilité par quelques opérations) :**

| **Thm 4 (Limite monotone) :**

| **Cor 5 (Existence de limite) :**

| **Déf 6 (Fonction convexe, concave, strictement convexe, strictement concave) :**

| **Ex 7 :** La norme, les applications linéaires. Le déterminant est log-concave.

| **Ex 8 :** $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \lambda_{\max}(A)$ est convexe.

| **Prop 9 :** Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi les applications "pentes" sont croissantes.

| **Cor 10 (Inégalité des trois pentes) :**

II Partie B - Des caractérisations de toutes formes

II.1 Caractérisation via de la régularité

| **Thm 20 (Caractérisation monotonie pour les fonctions dérivables) :**

| **Ex 21 :** Exemples triviaux en dérivant (voir [Ram-Des-Odo] ou autre).

| **Prop 22 (Stricte monotonie pour les fonctions dérivables) :**

| **Thm 23 (Caractérisation convexe pour les fonctions différentiables) :**

| **Thm 24 (Caractérisation convexe pour les fonctions 2 fois différentiables) :**

| **Ex 25 :** La fonctionnelle quadratique est convexe ssi A est symétrique positive. $\sin$ est parfois concave.

II.2 Convexité et géométrie [Li][Bec]

| **Thm 26 (Caractérisation par les tangentes) :**

■ **Prop 27** : Une fonction f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

App 28 (Convexité et fonctions affines) :

■ Ex 29 (En dim 1) :

III Partie C - Applications aux séries [Hau] [Gou] [Amr2]

■ **Prop 30 (Limite simple)** :

Thm 31 (Comparaison série intégrale) :

■ Ex 32 (Série harmonique) :

Thm 33 (Dini) :

■ Contre-Ex 34 :

IV Partie D - Vive les inégalités

IV.1 Inégalités élémentaires [Gou]

■ **Prop 35 ("Jensen discrète")** :

■ Ex 36 : Inégalité arithmético-géométrique.

■ **Prop 37** : Inégalités pour $\sin$, $\tan$, $\exp$.

App 38 (Archimède) :

IV.2 Inégalités importantes ! [Bri-Pag]

■ **Prop 39 (Young, Hölder)** :

Thm 40 (Inégalité de Jensen) :

App 41 : Inclusion des L^p pour les mesures finies.

IV.3 Et en probabilité ? [Ber]

■ **Prop 42 (Inégalité de Jensen)** :

Thm 43 : Hoeffding

App 44 (Intervalles de confiance) :

V Partie E - Optimisation

V.1 L'intérêt d'avoir une fonction convexe [Bec] [Rom]

■ **Prop 45 (Point critique)** :

■ **Prop 46** : Un minimum local est global.

■ **Prop 47** : Unicité du minimum dans le cas strictement convexe

■ Ex 48 : $\exp$ est strictement convexe, sans minimum.

■ Ex 49 : Fonctionnelle quadratique

V.2 Gradient à pas optimal : un cas particulier [Ber-Ber]

■ Ex 50 (Fonctionnelle quadratique) :

🐦 Dév 51 (Inégalité de Kantorovitch) :

🐦 Dév 52 (Gradient à pas optimal) :

V.3 Vers l'infini [Ber-Ber] [Cia]

■ **Déf 53 (Convergence faible)** :

Thm 54 (Banach-Alaoglu) :

App 55 : Fonctionnelle convexe corecive continue t'intéresse tu connais.

■ Ex 56 : Fonction de Karine

VI Partie F - Application aux EDOs ? [Gou-Wad]

■ **Déf 57 (Fonction de Lyapunov)** :

■ **Déf 58 (Stabilité des solutions)** :

🐦 Dév 59 (Fonction de Lyapunov et stabilité) :

■ Ex 60 :